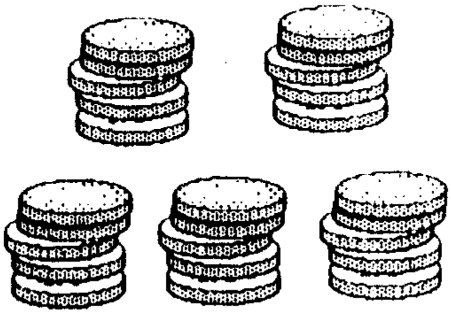
ENUNCIADOS Y SOLUCIONES
FINAL XXVII OMA

1. ¡LISTO, EL BANQUERO!



Las monedas de la figura, de la misma dimensión, están organizadas en pilas. Cada pila contiene 5 monedas. Una de las pilas está formada por monedas falsas, las otras pilas sólo tienen monedas normales.

Las piezas falsas pesan cada una 9'8g en lugar de 10g (es decir, 0'2g menos que las normales)

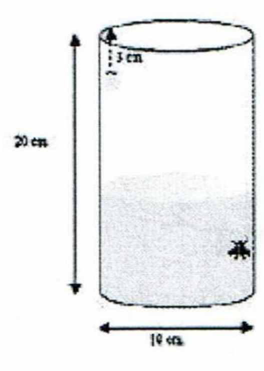
Un banquero, especialista en la detección de monedas falsas, dispone de una balanza de precisión.

En una sola pesada el banquero puede decir cuál es la pila de monedas falsas. ¿Cómo lo hace?

SOLUCIÓN

Se trata de pesar un montón formado por una moneda de la primera pila, dos de la segunda, tres de la tercera, cuatro de la cuarta y cinco de la quinta, si el montón fuese todo de monedas buenas pesaría 15 x 10 = 150 g, como hay alguna falsa según las veces que falten 0,2 g se averigua la pila de las monedas falsas, así si pesa 149,8 es que la pila de monedas falsas es la primera, si pesa 149,6 es la segunda, si pesa 149,4 es la tercera pila, si pesa 149,2 es la cuarta pila y si pesa149 es la quinta pila.

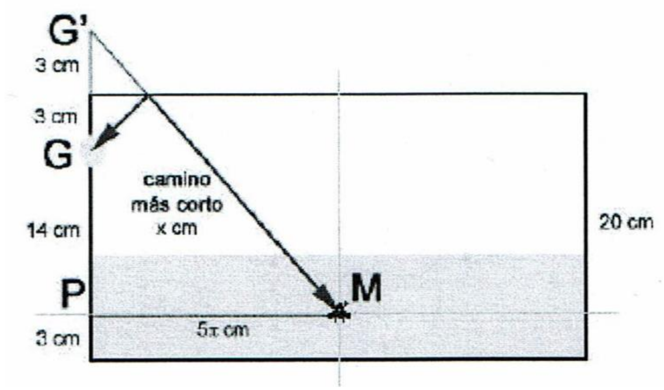
2. LA MIEL Y LA MOSCA



En la pared interior de un vaso cilíndrico, de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura hay una gota de miel situada a 3 cm del borde del recipiente. En la pared exterior, y en el punto exactamente opuesto a la gota, se encuentra una mosca.

a) ¿Cuál es el camino más corto que puede seguir la mosca para llegar a la gota de miel?
b) ¿Qué longitud debe recorrer la mosca?

SOLUCIÓN
Al estar la mosca en el exterior, ésta deberá llegar al borde para poder entrar al interior y llegar a la gota.



Desplegando la superficie lateral del cilindro se observa la ruta más corta:
El camino más corto es de la misma longitud que el segmento G´M, siendo G´ el punto simétrico de la gota de miel G respecto del lado superior de la superficie.
Se construye el triángulo rectángulo formado por los puntos G´M (mosca) y P (punto de intersección del lado derecho de la superficie y de la recta paralela al lado superior)
La mitad de la anchura de la superficie es $PM = \pi r = 5 \cdot \pi\ cm$ y $PG' = 20\ cm$
Por tanto, por el teorema de Pitágoras, el camino más corto mide:

$$x = \sqrt{(5\pi)^2 + 20^2} \approx 25{,}43\ cm$$

El camino más corto que debe recorrer la mosca hasta la gota de miel mide 25,43cm

3. ESCAPE ROOM

Se oye un ruido ensordecedor de cerraduras, las puertas del aula acaban de cerrarse con estrépito. El profesor intenta abrirlas sin éxito. Todos os miráis y empieza el nerviosismo, nadie sabe qué está sucediendo. Observáis la salida y os dais cuenta de la existencia de tres grandes candados de combinación (uno rojo, uno verde y uno azul) en los que nadie había reparado inicialmente. Los tres monitores que hay en el aula se encienden de repente… uno con la pantalla en rojo, otro en azul y el último en verde. En ellos aparece una cuenta atrás de 10 minutos y puede leerse:

Monitor rojo:
98 ,79, X, 47, 34, 23, Y, 7, 2, -1.
Combinación de apertura: 100*X+Y

Monitor azul:
HAZ&DE#LUZ =184&35#724
Combinación de apertura: AZUL

Monitor verde:
Combinación de apertura: Múltiplo de 11 y de 9 de cuatro dígitos, que empieza por 9 y al dividirlo por 10 su resto es 0.

Quedan menos de 30 segundos para que el reloj se ponga a 00:00. Os dais cuenta que la solución a cada una de los enigmas en los monitores es la clave para abrir cada uno de los candados del color pertinente. Inmediatamente, el compañero que se encuentra más próximo a la puerta introduce las claves y los tres candados se abren uno tras otro, 3, 2, 1... Salís al exterior y el pasillo está vacío, nadie en el resto de aulas, ningún ruido más allá del cierzo que golpea las ventanas…

SOLUCIÓN:
Monitor rojo: La combinación de la apertura es 100*62+14= **6214.**

Basta observar que la serie se obtiene restando números impares consecutivos en orden descendente empezando por 19:

98, 98-19, 79, 79-17=**62=X**, 62-15=47, 47-13=34, 34-11=23, 23-9=**14=Y**, 14-7=7, 7-5=2, 2-3=-1

O bien como la serie de cuadrados perfectos menos 2 unidades ($n^2 - 2$):

100-2=98, 81-2=79, 64-2=62=X, 49-2=47, 36-2=34, 25-2=23, 16-2=14=Y, 9-2=7, 4-2=2, 1-2=-1

Monitor azul: Asociamos directamente las letras con los números la combinación es: **AZUL=8427**

HAZ DE LUZ =184 35 724

H=1 A=8 Z=4 D= 3 E=5 L=7 U=2 Z=4

AZUL=8427

Monitor verde: **la condición es 9900**

De los cuatro números conocemos el primero: 9 y el último 0 (para poder ser divisible por 10 el número debe acabar e 0. Tenemos: 9 x y 0

Para que le número sea divisible por 11, el criterio de divisibilidad dice que la suma de los dígitos impares menos la suma de los dígitos pares es múltiplo de 11:

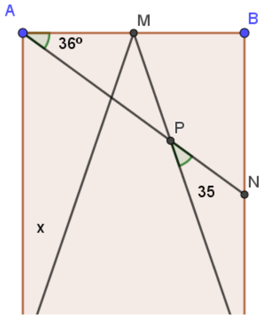
(x+0)-(9+y)=11 ó 0

Los números que cumplen esa condición son: 9020, 9130, 9240, 9350, 9460, 9570, 9680, 9790, 9990 de los que sólo 9990 es múltiplo también de 9.

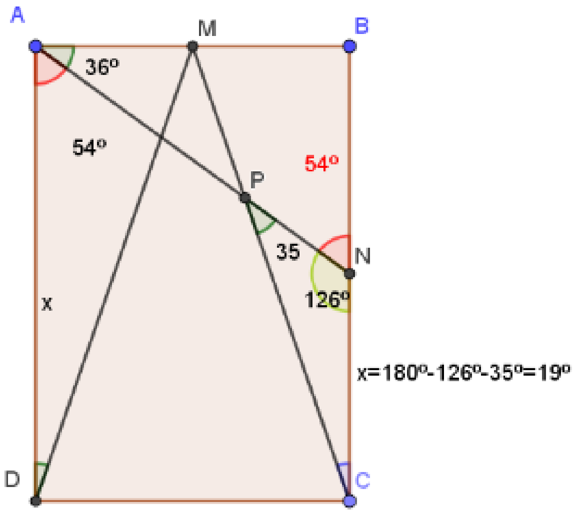
4. MIDIENDO ÁNGULOS

Dibuja un rectángulo y llama A, B, C y D a sus vértices. Pinta el punto medio del lado $\overline{AB}$ y llámalo M. Pinta el punto medio del lado $\overline{BC}$ y llámalo N.
Ahora une A con N y C con M. Llama P al punto donde se cortan esos segmentos.
Si el ángulo $\widehat{NAB}$ mide 36º y el ángulo $\widehat{CPN}$ mide 35º, ¿cuánto mide el ángulo $\widehat{MDA}$?

SOLUCIÓN
En primer lugar, deben dibujar con los datos dados la figura de la derecha.



El ángulo $\widehat{DAN}$= 90º-36º=54º
Por ángulos alternos internos, el ángulo $\widehat{BNA}$=54º y el ángulo $\widehat{PNC}$=180º-54º=126º
Por tanto, en el triángulo NCP, el ángulo de vértice C es:
$\widehat{BCM}$=180º-126º-28º=26º
Los ángulos $\widehat{MDA}$=x y $\widehat{BCM}$ son iguales al ser los triángulos ADM y BCM iguales puesto que son dos triángulos rectángulos con los catetos correspondientes iguales
(M punto medio y $\overline{AD}$ *y* $\overline{BC}$ lados iguales del rectángulo)



El ángulo $\widehat{MDA}$=19º

5. ¡AHORRA TONER!

Al imprimir en mi impresora con la opción “AHORRO DE TÓNER”, me indica que ahorro un 20% de tóner en cada copia que imprima.

a) ¿En qué % aumentará la cantidad de copias que podrá imprimir si siempre empleo la modalidad “AHORRO DE TÓNER”?
b) Con un ahorro del a% de tóner en cada copia, ¿cuál es el x% de aumento de copias que podré imprimir si siempre empleo la modalidad “AHORRO DE TÓNER”?

SOLUCIÓN

a) Supongamos que con un cartucho de “tóner” se pueden imprimir c copias en su modo de impresión normal.

En tal caso, una copia emplea $\frac{1}{c}$ del cartucho de “tóner”.

Si se hacen con el ahorro de tóner, una copia empleará $0{,}8 \cdot \frac{1}{c}$ del cartucho de tóner.

De este modo, con “AHORRO DE TÓNER” activado, con 1 cartucho de “tóner” se pueden hacer $\frac{1}{0{,}8 \cdot \frac{1}{c}} = \frac{c}{0{,}8} = 1{,}25c$

Por tanto, $1{,}25c - c = 0{,}25c = 25\%c$

El **porcentaje de aumento de copias usando esa modalidad es del 25% .**

b) Un cartucho de tóner imprime c copias en modo NORMAL.

Una copia gasta $\frac{1}{c}$ del cartucho de tóner en modo NORMAL.

En modo AHORRO DE TÓNER, con una copia se emplea $\left(1 - \frac{a}{100}\right) \cdot \frac{1}{c}$ del cartucho de tóner.

En modo AHORRO DE TÓNER, con un cartucho de tóner las copias que se pueden imprimir son:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{a}{100}\right) \cdot \frac{1}{c}} = \frac{c}{\frac{100 - a}{100}} = \frac{100}{100 - a} \cdot c$$

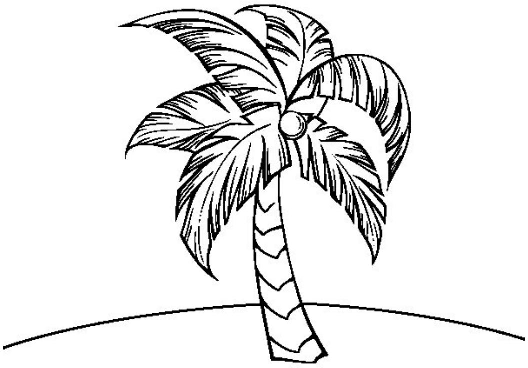
El aumento de copias es:

$$\frac{100}{100 - a} \cdot c - c = \left(\frac{100}{100 - a} - 1\right) \cdot c = \left(\frac{100 - 100 + a}{100 - a}\right) \cdot c = \frac{a}{100 - a} \cdot c$$

Por tanto, **el x% de aumento de copias que se pueden hacer con un cartucho de tóner si se emplea el modo AHORRO DE TÓNER es:**

$$\boldsymbol{\frac{100a}{100 - a}}\%$$

6. EL OASIS



Dos nómadas se detuvieron en un oasis a descansar y reponer fuerzas después de una larga travesía por el desierto.
Cuando iban a ponerse a comer se les presentó un peregrino hambriento y sin provisiones. Los nómadas, solidarios, distribuyeron equitativamente entre los tres sus exiguos alimentos.
El primero llevaba 5 panes y el otro, 3. El peregrino, agradecido por su hospitalidad, les recompensó con 8 monedas de plata. ¿Cómo se las debieron repartir los dos nómadas de manera justa?

SOLUCIÓN
Al repartirse los 8 panes cada uno comió $\frac{8}{3}$ de los panes.
El primero de los nómadas aportó 5 panes, de los cuales se comió $\frac{8}{3}$ y dio al peregrino $5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$
El segundo nómada aporto 3 panes, de los cuales se comió $\frac{8}{3}$ y dio al peregrino: $3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$
Como conclusión, el primer nómada aportó 7 partes de las 8 que comió el peregrino y el segundo 1 de las 8. Como son 8 monedas **el primer nómada toma 7 monedas y el segundo nómada toma 1 moneda.**