XXVII Olimpiada Matemática

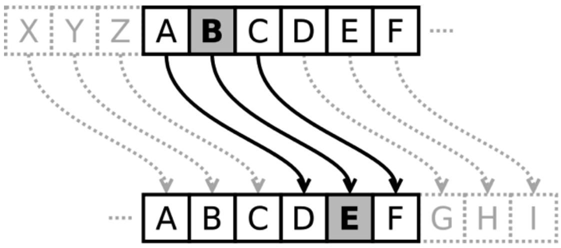
2.º de ESO

Fase Semifinal • 24 de marzo de 2018 • Hoja resumen

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas

Problema 1. *El cifrado de César*

Los polinomios también pueden servir para encriptar mensajes. El código de César es uno de los sistemas más sencillos de codificación de mensajes. Para cifrar los mensajes, cada letra del alfabeto es asociada con su posición en él. Así pues, durante el cifrado, cada letra en el texto original «x» es reemplazada por otra letra que se encuentra un número fijo «d» de posiciones más adelante en el alfabeto ($x \to x+d$). En el dibujo puede contemplarse cómo quedaría un desplazamiento de 3, correspondiente al polinomio «$x+3$», la A sería sustituida por la D (situada 3 lugares a la derecha de la A), la B sería reemplazada por la E y así sucesivamente. Este método debe su nombre a Julio César que lo usaba para comunicarse con sus generales.



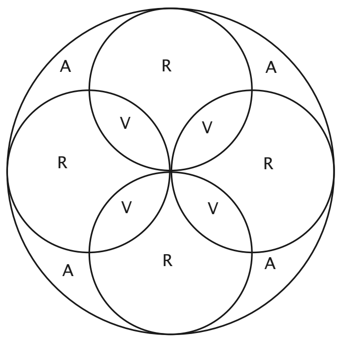
¿Podrías recomponer el siguiente mensaje que ha sido codificado usando este método mediante el polinomio $5(x-3)-\frac{4}{3}(3x-15)-1$? (Usamos el alfabeto con la ñ).

«M OSZI PEXLW»

Problema 2. *La vidriera*

La vidriera de la fachada principal de una iglesia contiene un rosetón como el de la figura, donde las letras R, V, y A representan los colores rojo, verde y azul, respectivamente.

Sabiendo que se han empleado 400 cm² de cristal verde, ¿cuántos centímetros cuadrados de cristal azul son necesarios?



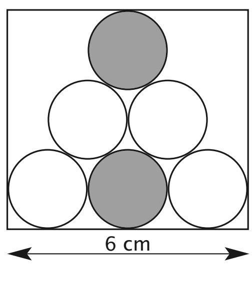
Problema 3. *Torneo de ajedrez*

En un torneo de ajedrez hay 6 eliminatorias para llegar a la final. Si en cada una de ellas se eliminan la mitad más 1 de los participantes, ¿cuántos jugadores había inscritos al principio? Razona la respuesta.

Problema 4. *Apilando círculos*

En el interior de un rectángulo, del que se sabe que uno de sus lados mide 6 cm, se apilan seis círculos de igual dimensión tal como se indica en la figura.

Determina la mínima distancia que hay entre los círculos sombreados.



Problema 5. *El lado oculto del cubo*

De un dado conocemos tres de sus caras, tal como muestra la figura.

Sabiendo que los otros tres números son primos y que la suma de las caras opuestas es siempre la misma, ¿qué número está en la cara opuesta a la marcada con el número 14?

Problema 6. *Fabricación de «Yeso Rosa»*

Una empresa de Teruel decide sacar al mercado un «yeso rosa». Para ello va a mezclar yeso blanco, yeso gris y yeso rojo de Albarracín de la siguiente forma:

— 4 sacos de 25 kg de yeso blanco.
— 3 sacos de 20 kg de yeso gris
— 5 sacos de 10 kg de yeso rojo de Albarracín.

a) Si el precio del yeso blanco es 0,1 €/kg, el del yeso gris es 0,15 €/kg y el del yeso rojo es 0,25 €/kg, ¿a qué precio le sale a la empresa el kilo de yeso rosa?
b) Si el saco vacío de 15 kg le cuesta a la empresa 0,3 €/unidad y el coste de envasado es 0,02 €/saco, ¿a qué precio deben vender el saco si quieren obtener un beneficio de un 30 % sobre el precio de coste?
c) En las condiciones del apartado anterior, ¿a qué precio deben vender el saco si quieren obtener un beneficio de un 30 % sobre el precio de venta?

SOLUCIONES SEMIFINAL

1. EL CIFRADO DE CÉSAR

Asignamos los números a las letras:

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
K	**L**	**M**	**N**	**Ñ**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
T	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**			
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**			

La expresión algebraica reducida es: $5(x-3)-\frac{4}{3}(3x-15)-1=5x-15-4x+20=x+4$

Para codificar un mensaje se sustituye cada letra por la que ocupa cuatro posiciones más a la derecha, luego para decodificarlo será la que ocupa cuatro posiciones más a la izquierda.

Así el mensaje M OSZI PEXLW queda: I LOVE MATHS

2. LA VIDRIERA

Como el radio de un círculo pequeño es la mitad del radio del círculo grande, el área de aquel será la cuarta parte del área de este.
Una zona roja R y dos verdes V componen un círculo pequeño, cuarta parte del área total: $R + 2V = \frac{1}{4}$ total.
Dos medias zonas rojas R, una verde y una azul componen un cuadrante del círculo mayor: $R + V + A = \frac{1}{4}$ total
Por tanto, $R + 2V = R + V + A \quad \rightarrow \quad V = A$
Por tanto, las zonas azul y verde tienen áreas iguales, por lo que la zona azul medirá también 400 cm^2

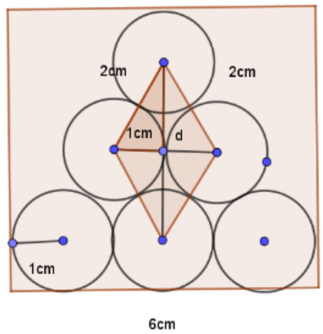
3. TORNEO DE AJEDREZ

Comenzando por el final:
A la final llegan dos jugadores
En la fase anterior habría x, de los cuales se eliminan la mitad de x más 1 y continúan la mitad de x menos 1
Por tanto, la mitad de x menos 1 son 2 esto quiere decir que x es 6
Si seguimos este razonamiento de atrás adelante hasta completar las 6 eliminatorias, tenemos:
2 → 6 → 14 → 30 → 62 → 126 → 254

Luego había inscritos 254 jugadores.

4. APILANDO CÍRCULOS

Uniendo los centros de los círculos obtenemos un triángulo rectángulo de lados 2 y 1 cm. Llamando d a la mitad de la distancia entre los dos centros de los círculos coloreados y por el Teorema de Pitágoras:



$$1^2 + d^2 = 2^2$$

De donde:

$$d = \sqrt{3}$$

Luego la distancia entre los centros de los dos círculos es: $2\sqrt{3}$

La menor distancia entre los círculos la obtenemos quitando los dos radios:

$$2\sqrt{3} - 2 \approx 1{,}46\ cm$$

5. El LADO OCULTO DEL CUBO

Sean a, b, c los valores primos de las tres caras opuestas, respectivamente, a las de los números 14, 18 y 35.

Se cumple que:

$$\begin{cases} 14 + a = 18 + b \\ 18 + b = 35 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ b - c = 17 \end{cases}$$

Debido a que b y c son primos (por tanto, impares salvo el 2) la resta debería dar siempre par. Como da 17, impar, b y c deben tener distinta paridad: uno es par y otro impar. Por tanto, c=2 ⇒ b=19 ⇒ a=23.

La cara opuesta a 14 es a=23

6. FABRICACIÓN DE “YESO ROSA”

a)

YESO	Nº SACOS	PESO (KG)	PRECIO (€)
Blanco	4	100	10
Gris	3	60	9
Rojo	5	50	12,50
Rosa		210	31,50

El precio del yeso rosa es: $\frac{31,50}{210} = 0,15\ €/Kg$

b) El precio de cada saco es:

$$15 \cdot 0,15 + 0,3 + 0,02 = 2,57€/saco$$

El precio al que deben vender el saco para obtener el 30% de beneficio sobre el precio de coste es:

$$1,30 \cdot 2,57 = 3,34\ €$$

c) Si el beneficio es sobre el precio de venta que llamamos x, el 70% de x= 2,57, luego el precio será: $\frac{2,57}{0,7} = 3,67\ €$